

KENDALI OPTIMAL PADA MODEL PENYAKIT SCABIES

Pardi Affandi¹, Faisal²

^{1,2} ULM

p.affandi@ulm.ac.id

Abstrak

Scabies adalah penyakit kulit yang disebabkan oleh kutu *Sarcoptes scabiei* yang menimbulkan gatal. *Scabies* termasuk zoonosis yang menyerang kulit dan dapat mengenai semua golongan di seluruh dunia. Penyebab penyakit *Scabies* sudah lama dikenal sebagai akibat infestasi tungau yang dinamakan *Acarusscabiei* atau pada manusia disebut *Sarcoptes scabiei* varian hominis. *Sarcoptes scabiei* termasuk filum Arthropoda, kelas Arachnida, ordo Acarina, super famili *Sarcoptes* (Djuanda, 2010). Tujuan penelitian ini membahas terbentuknya model penyakit *Scabies* mengikuti model SEIRS yang terdiri dari empat kompartemen kelompok susceptible (rentan), Exposed (kelas populasi yang laten), kelompok infected (terinfeksi) dan kelompok recovered (sembuh). Terlebih dahulu dibentuk model persamaan diferensialnya. Dari model ditentukan titik kestabilan dari sistem Sehingga diperoleh titik endemik dan titik ekuilibrium bebas penyakit. Langkah selanjutnya menggunakan Kendali optimal berupa pengaruh treatment pada model yang terbentuk dengan melibatkan Hamiltonian dan maksimum Pontryagin. Hasilnya akan diperoleh solusi optimal kontrol dengan pemberian treatment pengobatan untuk mencegah penyakit *Scabies*.

Kata Kunci: *Scabies*, model SEIRS maksimum Pontryagin.

PENDAHULUAN

Banyak permasalahan yang melibatkan teori sistem dan teori kendali serta aplikasinya. Beberapa referensi teori yang mengaplikasikan teori kontrol ke dalam masalah inventori adalah Sprzeuzkouski (1967), Hwang, Fan dan Erickson (1967), Pekelman (1974), Bensoussan, Affandi P. (2011). Selain dalam bidang industri teori kendali juga banyak digunakan untuk menyelesaikan permasalahan dalam masalah kesehatan. Diantaranya penentuan interval waktu dan dosis optimal pada penyakit yang sangat laten pada wilayah rawa yaitu penyakit malaria. Selain pada penyakit malaria juga dapat digunakan untuk menyelesaikan model penyakit *Scabies*.

Penyebab penyakit *Scabies* sudah lama dikenal sebagai akibat infestasi tungau yang dinamakan *Acarus scabiei* atau pada manusia disebut *Sarcoptes scabiei* varian hominis. *Sarcoptes scabiei* termasuk filum Arthropoda, kelas Arachnida, ordo Acarina, super famili *Sarcoptes* (Djuanda, 2010). Gejala yang menandai *Scabies* adalah gatal luar biasa, sering kali parah dan memburuk di malam hari, muncul di kulit menyerupai bulatan seperti galian yang tipis dan tidak teratur, kulit agak melepuh atau terdapat benjolan seperti jerawat yang kecil atau berubah warna, selanjutnya kulit mengeras dengan kerak tebal yang mengandung ribuan tungau dan telur, dan mudah terkelupas saat disentuh.

Pemberantasan penyakit *Scabies* selalu dilakukan oleh pemerintah melalui Dinas Kesehatan Kalimantan Selatan (2016) dan pencapaiannya sudah mengalami peningkatan apalagi kondisi pasca terjadi genangan air, namun masih menjadi suatu masalah dan perlu upaya yang lebih keras untuk mencapai target bebas penyakit *Scabies* 2020. Selain melakukan pengobatan, juga dibutuhkan treatment yang tepat, treatment adalah suatu langkah yang dilakukan untuk mengatasi masalah yang ada. Selain itu cara lain untuk memberantas penyakit yaitu dengan mengendalikannya. Pengendalian tersebut dapat dilakukan melalui pemodelan matematika. Ross (1911) pertama kali memodelkan penyebaran penyakit menggunakan model matematika. Kemudian Kermack & McKendrick (1927) mengenalkan salah satu model epidemik dasar yaitu SIR. Model ini terdiri dari tiga kompartemen yaitu Susceptible (rentan), Infected (infeksi), dan Recovered (sembuh).

Padapenelitian Nyamun dkk (2016) dibahas Analisa Kestabilan Model SEIS Penyakit Scabies dengan melibatkan populasi tertentu, tingkat infeksi Penyakit Scabies dapat dianalisis dengan memodelkan penyebaran penyakit Scabies menggunakan model SEIS. Namun, model yang akan dibahas pada penelitian ini menggunakan model SEI. Model ini terdiri dari tiga kompartemen yaitu Susceptible (rentan), Exposed (kelas populasi yang laten), Infectious (kelas populasi yang terinfeksi).

Selanjutnya dengan menggunakan kontrol optimal melalui kendali penggunaan treatment pengobatan. Terlebih dahulu dipresentasikan terbentuknya model penyakit Scabies, selanjutnya menyelesaikan masalah kestabilan dari model dan memberikan faktor kendali pada model dengan menggunakan prinsip Pontryagin dengan melibatkan fungsi Hamiltonian akan diperoleh solusi kontrol dengan pemberian treatment pengobatan untuk mencegah penyakit Scabies.

METODE

Metode penelitian yang digunakan adalah dengan menggunakan literatur jurnal – jurnal dan buku – buku yang berhubungan dengan penyakit *Scabies*, khususnya model SEI. Oleh karenanya materi yang berasal dari hasil karya ilmiah para pakar matematika dalam bentuk jurnal. Prosedur penelitian diawali dengan mengkaji tentang yang mendasari dan yang berkaitan dengan model epidemiologi SEI dengan adanya pengobatan, menentukan asumsi dan mendefinisikan parameter yang digunakan pada model. Setelah itu, dibuat diagram transfer model epidemi SEI dan berdasarkan diagram transfer tersebut dituliskan terbentuknya sistem persamaan diferensial untuk model epidemiologi SEI dengan adanya pengobatan sehingga terbentuk model matematika epidemi SEI.

Selanjutnya, menentukan titik–titik ekuilibrium model tersebut dengan menggunakan definisi titik ekuilibrium suatu sistem persamaan diferensial. Setelah menentukan titik–titik ekuilibrium model tersebut, langkah selanjutnya menyelidiki sifat kestabilan lokal titik–titik ekuilibrium model tersebut. Untuk menyelidiki kestabilan lokal dilakukan linearisasi pada sistem dengan menentukan matriks Jacobian di titik ekuilibrium. Sifat kestabilan lokal titik ekuilibrium dapat ditentukan asalkan titik tersebut hiperbolik. Selanjutnya menentukan nilai eigen dari matriks Jacobian tersebut dengan menggunakan definisi polinomial karakteristik suatu matriks. Salah satu alternatif menentukan nilai eigen dari polinomial karakteristik suatu matriks digunakan juga Teorema Routh–Hurwitz.

Untuk mengurangi populasi susceptible dapat menggunakan kontrol optimal yang berupa pengobatan, dimana obat tersebut diberikan kepada populasi susceptible sehingga populasi tersebut masuk ke dalam populasi recovered. Kontrol optimal tersebut dapat diperoleh dengan menggunakan prinsip maksimum pontryagin. Prinsip maksimum pontryagin merupakan prinsip yang menyatakan kondisi yang diperlukan agar diperoleh solusi yang optimal dengan kontrol u yang dapat meminimumkan fungsi Hamilton pada waktu t (Elly, 2016).

Kendali terhadap model penyakit *Scabies* akan diperoleh nilai hasil kendali u^* yang merupakan upaya pemberian obat yang diberikan untuk mengurangi jumlah individu yang rentan.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pembentukan Model Epidemiologi SEI dengan adanya Pengobatan

Proses pembentukan model epidemiologi SEI dengan pengobatan dimulai dengan membentuk model yang sesuai dengan model penyakit *Scabies* dengan mengikuti kerangka model SEI di mana individu pada awalnya rentan (S), kemudian setelah terjadi infeksi menghabiskan beberapa waktu di kelas 'terbuka' (E) laten. Setelah tungau betina yang telah dibuahi dipindahkan ke individu yang rentan, waktu tungau berarti ada penundaan, antara 7 sampai 14 hari, sebelum inang dapat menjadi infeksi. Namun selama periode ini, liang kutu masih dapat diamati pada kulit inang. Akhirnya, individu menjadi menular (I), yang dapat menulari orang lain.

Sehingga pembentukan itik awal model SEI dalam populasi tertutup ukuran N yang terdiri dari tiga variabel, $S(t)$, $E(t)$ dan $I(t)$ sehingga $S(t) + E(t) + I(t) = N$, untuk semua nilai t , mewakili jumlah individu yang tidak terinfeksi dengan *Scabies* (Rentan), yang telah terinfeksi tetapi tidak dapat menginfeksi orang lain (Paparan), dan yang telah terinfeksi dan mampu menginfeksi masing-masing orang lain (Infectious).

Model SEI diterapkan pada penyakit yang memiliki masa inkubasi sekitar 7 sampai 14 hari. Pada umumnya selama masa laten tersebut individu tidak bisa menularkan penyakit, tetapi pada beberapa penyakit, individu yang berada dalam masa laten, infeksi dan sembuh mempunyai kemungkinan untuk menularkan penyakit. Pada model SEI populasi dibagi menjadi 3 kelas (subpopulasi) yaitu

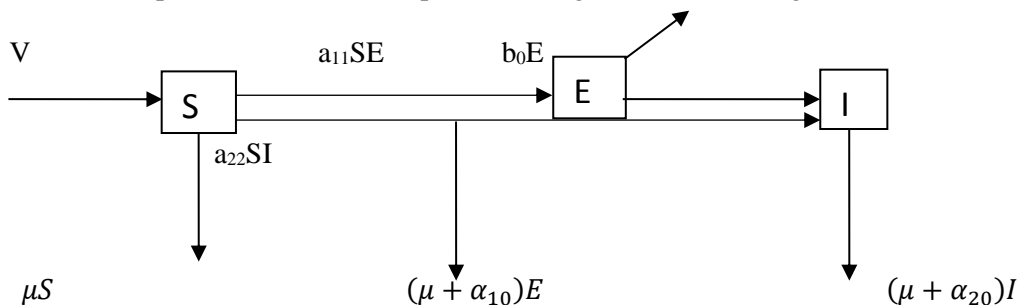
- Kelas S (Susceptible) menyatakan kelas individu yang rentan
- Kelas E (Exposed) menyatakan kelas individu yang telah terinfeksi tapi belumsakit (laten)
- Kelas I (Infectious) menyatakan kelas individu yang sudah terjangkit penyakit

Pada pemodelan yang akan dibentuk, digunakan asumsi–asumsi sebagai berikut, Populasi terbuka, individu yang berada dalam kelas laten, infeksi dan sembuh mempunyai kemungkinan untuk menularkan penyakit, dan masa inkubasi sekitar 7 samapi 14 hari.

Definisi dari parameter – parameter yang digunakan pada model adalah sebagai berikut

- V menyatakan konstanta rekrutmen dari S
- a_{11} menyatakan laju dari kontak efektif pada periode laten
- a_{22} menyatakan laju dari kontak efektif pada periode infeksi
- μ menyatakan laju kematian alami
- α_{10} menyatakan laju kematian karena penyakit pada kelas E
- α_{20} menyatakan laju kematian karena penyakit pada kelas I
- γ_0 menyatakan laju dari kelas E ke kelas I

Berdasarkan permasalahan diatas dapat dibuat diagram transfer sebagai berikut



Gambar 1. Diagram transfer kompartemen dari populasi manusia.

Dinamika epidemiologi penyakit *Scabies* SEI dengan adanya pengobatan berdasarkan diagram alir di atas dapat diilustrasikan sebagai berikut:

Berdasarkan diagram transfer di atas dapat diformulasikan modelnya sebagai berikut

$$\frac{dS}{dt} = V - a_{11}SE - a_{22}SI - \mu S \quad (3.1)$$

$$\frac{dE}{dt} = a_{11}SE + a_{22}SI - b_0E - (\mu + \alpha_{10})E \quad (3.2)$$

$$\frac{dI}{dt} = b_0E - (\mu + \alpha_{20})I \quad (3.3)$$

Diberikan $N(t)$ menyatakan ukuran populasi pada saat t , maka $N(t) = S(t) + E(t) + I(t)$.

Berdasarkan Sistem (3.1) s.d (3.3) dan Persamaan $N(t) = S(t) + E(t) + I(t)$ maka $\frac{dN}{dt} = V - \mu N - \alpha_{10}E - \alpha_{20}I$, kemudian pada saat individu manusia yang laten dan terinfeksi nol maka laju populasi manusia menjadi

$$\frac{dN}{dt} = V - \mu N \Leftrightarrow \frac{dN}{dt} + \mu N = V.$$

Diberikan $N(t)$ menyatakan ukuran populasi pada saat t , maka $N(t) = S(t) + E(t) + I(t)$.

Kemudian pada saat individu manusia yang laten dan terinfeksi nol maka laju populasi manusia menjadi $\frac{dN}{dt} = V - \mu N \Leftrightarrow \frac{dN}{dt} + \mu N = V$. (3.4)

Jika disubstitusikan syarat awal $N(0) = N_0$ maka diperoleh solusi persamaan (3.4) menjadi $N(t) = N_0 e^{-\mu t} + \frac{V}{\mu} (1 - e^{-\mu t})$.

Untuk menyederhanakan Sistem (3.1) s.d (3.4) dimisalkan $\mu dt = d\tau$ atau $\tau = \mu t$, maka Sistem (3.1) s.d (3.3) menjadi

$$\frac{dS}{d\tau} = \frac{V}{\mu} - a_1 SE - a_2 SI - S \quad (3.5)$$

$$\frac{dE}{d\tau} = a_1 SE + a_2 SI - (1 + b + \alpha_1) E \quad (3.6)$$

$$\frac{dI}{d\tau} = bE - (1 + \alpha_2) I \quad (3.7)$$

Titik ekuilibrium Sistem (3.5) s.d (3.7) diperoleh dengan menjadikan ruas kanan masing-masing persamaan sama dengan nol, yaitu

$$\frac{V}{\mu} - a_1 SE - a_2 SI - S = 0, \quad (3.8)$$

$$a_1 SE + a_2 SI - (1 + b + \alpha_1) E = 0, \quad (3.9)$$

$$bE - (1 + \alpha_2) I = 0, \quad (3.10)$$

$$\frac{A}{\mu} - N - \alpha_1 E - \alpha_2 I = 0. \quad (3.11)$$

Jika $I = 0$, maka dari Persamaan (3.10) diperoleh

$$bE = 0 \\ \Leftrightarrow E = 0.$$

Dari Persamaan (3.11) diperoleh $R = 0$, diperoleh

$$\frac{A}{\mu} - S = 0 \\ \Leftrightarrow S = \frac{A}{\mu}.$$

Jadi diperoleh titik ekuilibrium bebas penyakit $P_0(S, E, I) = \left(\frac{V}{\mu}, 0, 0\right)$. Selanjutnya akan dicari titik ekuilibrium endemik yaitu jika $I > 0$. Dari persamaan akan diperoleh titik ekuilibrium endemik

$$S = \frac{V(\alpha_1 \omega + \alpha_2 \gamma)}{(a_1 \omega + a_2 \gamma)(V - \mu N) + \mu(\alpha_1 \omega + \alpha_2 b)} \quad (3.13)$$

$$E = \frac{\omega[V - \mu N]}{\mu(\omega \alpha_1 + b \alpha_2)} \quad (3.14)$$

$$I = \frac{\gamma[V - \mu N]}{\mu(\alpha_1 \omega + \alpha_2 b)} \quad (3.15)$$

Kestabilan Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit

Selanjutnya akan dicari titik ekuilibrium endemik yaitu jika $I > 0$.

Dari persamaan akan diperoleh

$$S = \frac{V(\alpha_1 \omega + \alpha_2 \gamma)}{(a_1 \omega + a_2 \gamma)(V - \mu N) + \mu(\alpha_1 \omega + \alpha_2 b)} \quad (3.13)$$

$$E = \frac{\omega[V - \mu N]}{\mu(\omega \alpha_1 + b \alpha_2)} \quad (3.14)$$

$$I = \frac{\gamma[V - \mu N]}{\mu(\alpha_1 \omega + \alpha_2 b)} \quad (3.15)$$

Jika Sistem (3.13) s.d (3.15) disubstitusikan ke dalam Persamaan (3.9) diperoleh

$$\Leftrightarrow F(N)(V - \mu N) = 0, \quad (3.16)$$

dengan

$$F(N) = (\mu N \delta \omega - V(\delta \omega - \alpha_1 \omega - \alpha_2 \gamma))(b_1 \omega + b_2 \gamma) - \delta \omega \mu (\alpha_1 \omega + \alpha_2 \gamma).$$

Untuk $(V - \mu N) > 0$, maka dari Persamaan (3.16) haruslah $F(N) = 0$.

Untuk $N = 0$ diperoleh

$$F(0) = -A(\delta \omega - \alpha_1 \omega - \alpha_2 \gamma)(\beta_1 \omega + \beta_2 \gamma + \beta_3 k \gamma) - \delta \omega \mu (\alpha_1 \omega + \alpha_2 \gamma) < 0.$$

Untuk $N = \frac{V}{\mu}$ diperoleh

$$\begin{aligned} F\left(\frac{V}{\mu}\right) &= \mu \delta \omega \left(\frac{V}{\mu}\right) - V(\delta \omega - \alpha_1 \omega - \alpha_2 \gamma)(b_1 \omega + b_2 \gamma) - \delta \omega \mu (\alpha_1 \omega + \alpha_2 \gamma) \\ &= \delta \omega V - V(\delta \omega - \alpha_1 \omega - \alpha_2 \gamma)(b_1 \omega + b_2 \gamma) - \delta \omega \mu (\alpha_1 \omega + \alpha_2 \gamma) \\ &= \mu (\alpha_1 \omega + \alpha_2 \gamma) \delta \omega [R_0 - 1], \end{aligned}$$

$$\text{Dengan } R_0 = \frac{V(b_1 \omega + b_2 \gamma)}{\delta \omega \mu}.$$

Karena $F'(N) > 0$ maka $F(N)$ adalah fungsi monoton naik, jika $R_0 > 1$ maka $F\left(\frac{A}{\mu}\right) > 0$ dan terdapat suatu $N = N^*$ dengan $N^* \in \left(0, \frac{A}{\mu}\right)$ sedemikian sehingga $F(N^*) = 0$. Jadi Sistem (3.5) s.d (3.7) mempunyai titik ekuilibrium endemik tunggal $P^*(S^*, E^*, I^*)$, dengan S^*, E^*, I^* ditentukan oleh Persamaan (3.14) s.d (3.16).

Setelah Sistem (3.5) s.d (3.7) mempunyai titik ekuilibrium endemik tunggal selanjutnya akan dilihat masalah kestabilan sistem. Perhatikan kembali Sistem (3.14) s.d (3.16), kemudian fungsi-fungsi tersebut diturunkan secara parsial yaitu

1. Untuk fungsi $g_1(S, E, I) = \frac{V}{\mu} - b_1 S E - b_2 S I - S$ diturunkan terhadap S, E, I diperoleh

$$\frac{\partial g_1}{\partial S} = -\beta_1 E - \beta_2 I - 1$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial E} = -\beta_1 S$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial I} = -\beta_2 S$$

2. Untuk fungsi $g_2(S, E, I) = b_1 S E + b_2 S I - \delta E$ diturunkan terhadap S, E, I diperoleh

$$\frac{\partial g_2}{\partial S} = b_1 E + b_2 I$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial E} = b_1 S - \delta$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial I} = b_2 S$$

3. Untuk fungsi $g_3(S, E, I) = \gamma E - \omega I$ diturunkan terhadap S, E, I diperoleh

$$\frac{\partial g_3}{\partial S} = 0$$

$$\frac{\partial g_3}{\partial E} = \gamma$$

$$\frac{\partial g_3}{\partial I} = -\omega$$

Setelah fungsi-fungsi tersebut di atas diturunkan secara parsial terhadap S, E, I diperoleh matriks Jacobian Sistem (3.5) s.d (3.7) sebagai berikut

$$J(g(S, E, I)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1(S, E, I)}{\partial S} & \frac{\partial g_1(S, E, I)}{\partial E} & \frac{\partial g_1(S, E, I)}{\partial I} \\ \frac{\partial g_2(S, E, I)}{\partial S} & \frac{\partial g_2(S, E, I)}{\partial E} & \frac{\partial g_2(S, E, I)}{\partial I} \\ \frac{\partial g_3(S, E, I)}{\partial S} & \frac{\partial g_3(S, E, I)}{\partial E} & \frac{\partial g_3(S, E, I)}{\partial I} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -b_1E - b_2I - 1 & -b_1S & -b_2S \\ b_1E + b_2I & b_1S - \delta & b_2S \\ 0 & \gamma & -\omega \end{bmatrix}.$$

Untuk menyelidiki kestabilan titik ekuilibrium bebas penyakit dapat dilihat dari teorema berikut ini.

Teorema 3.1 Misalkan $R_0 = \frac{V(b_1\omega + b_2\gamma)}{\delta\omega\mu}$. Jika $R_0 < 1$, maka titik ekuilibrium bebas penyakit $P_0 \left(\frac{A}{\mu}, 0, 0\right)$ pada Sistem (3.5) s.d (3.7) adalah stabil asimtotik global.

Bukti

Matriks Jacobian di titik ekuilibrium $P_0 \left(\frac{A}{\mu}, 0, 0\right)$ adalah $Jf(P_0) = J \left(f \left(\frac{A}{\mu}, 0, 0\right)\right)$

$$= \begin{bmatrix} -1 & \frac{-b_1V}{\mu} & \frac{-b_2V}{\mu} \\ 0 & \frac{b_1V}{\mu} - \delta & \frac{b_2V}{\mu} \\ 0 & \gamma & -\omega \end{bmatrix}.$$

Polinomial karakteristik $Jf(P_0)$ adalah $P(\lambda) = \det(\lambda I - Jf(P_0)) = |\lambda I - Jf(P_0)|$.

Persamaan karakteristiknya adalah $|\lambda I - Jf(P_0)| = 0$

$$\Leftrightarrow (\lambda + 1) \left[\lambda^3 + \left(1 + \delta + \omega - \frac{b_1V}{\mu}\right) \lambda^2 + \left(\delta + \delta\omega + \omega - \frac{b_1V}{\mu} - \frac{b_1V\omega}{\mu} - \frac{b_2V\gamma}{\mu}\right) \lambda + \left(\delta\omega - \frac{b_1V\omega}{\mu} - \frac{b_2V\gamma}{\mu} - \frac{b_3V\gamma k}{\mu}\right) \right] = 0. \quad (3.17)$$

Persamaan (3.17) dapat ditulis menjadi

$$(\lambda + 1)(\lambda^3 + A\lambda^2 + B\lambda + C) = 0, \quad (3.18)$$

dengan

$$A = 1 + \delta + \omega - \frac{b_1V}{\mu}$$

$$B = \delta + \delta\omega + \omega - \frac{b_1A}{\mu} - \frac{b_1V\omega}{\mu} - \frac{b_2V\gamma}{\mu}$$

$$C = \delta\omega - \frac{b_1V\omega}{\mu} - \frac{b_2V\gamma}{\mu} - \frac{b_3V\gamma k}{\mu}.$$

Salah satu nilai eigen dari persamaan (3.18) adalah -1 , nilai-nilai eigen yang lain merupakan akar-akar dari polinomial berikut

$$Q(\lambda) = \lambda^3 + A\lambda^2 + B\lambda + C. \quad (3.19)$$

Perhatikan bahwa

$$A = 1 + \delta + \omega - \frac{b_1V}{\mu}.$$

Karena $R_0 = \frac{V(b_1\omega + b_2\gamma)}{\delta\omega\mu} < 1$, maka

$$\text{Jadi } A = 1 + \delta + \omega - \frac{b_1V}{\mu} > 0. \quad (3.20)$$

Selanjutnya

$$B = \delta + \delta\omega + \omega - \frac{b_1V}{\mu} - \frac{b_1V\omega}{\mu} - \frac{b_2V\gamma}{\mu}$$

Dari (3.12) diketahui bahwa $\left(\delta - \frac{b_1V}{\mu}\right) > 0$, dan dari (3.17) diketahui bahwa

$$\frac{b_1V}{\mu} + \frac{b_2V\gamma}{\omega\mu} < \delta$$

$$\Leftrightarrow \delta\omega - \frac{b_2V\gamma}{\mu} > 0.$$

Perhatikan bahwa

$$\left(\omega - \frac{b_1V\omega}{\mu}\right) = \left(1 - \frac{b_1V}{\mu}\right)\omega.$$

Dari (3.17) diketahui

Akibatnya $\left(1 - \frac{b_1V}{\mu}\right) > 0$, sehingga $\left(\omega - \frac{b_1V\omega}{\mu}\right) = \left(1 - \frac{b_1V}{\mu}\right)\omega > 0$.

Jadi $B = \left(\delta - \frac{b_1V}{\mu}\right) + \left(\delta\omega - \frac{b_2V\gamma}{\mu}\right) + \left(\omega - \frac{b_1V\omega}{\mu}\right) > 0$.

(3.21)

Selanjutnya

$$C = \delta\omega - \frac{b_1V\omega}{\mu} - \frac{b_2V\gamma}{\mu}$$

$$= \delta\omega - \frac{V(b_1\omega + b_2\gamma)}{\mu}.$$

Karena $R_0 = \frac{V(b_1\omega + b_2\gamma)}{\delta\omega\mu} < 1$, maka

Jadi $C = \delta\omega - \frac{V(b_1\omega + b_2\gamma)}{\mu} > 0$.

(3.22)

Selanjutnya akan ditunjukkan $AB > C$.

Karena $A = 1 + \delta + \omega - \frac{b_1V}{\mu}$ dan $\left(\delta - \frac{b_1V}{\mu}\right) > 0$ maka jelas $A > 1$. Selanjutnya karena $A > 1, B > 0$ dan $C > 0$ maka $AB > B$, jadi cukup ditunjukkan bahwa $B > C$.

Perhatikan bahwa

$$B = \delta + \delta\omega + \omega - \frac{b_1V}{\mu} - \frac{b_1V\omega}{\mu} - \frac{b_2V\gamma}{\mu}$$

$$> \delta\omega - \left(\frac{b_1V\omega}{\mu} + \frac{b_2V\gamma}{\mu}\right)$$

$$> \delta\omega - \left(\frac{b_1V\omega}{\mu} + \frac{b_2V\gamma}{\mu}\right) = C. \quad (3.22)$$

Dari Persamaan (3.19), (3.20), (3.21) dan (3.22) diperoleh bahwa

$A > 0, B > 0, C > 0$ dan $B > C$.

Berdasarkan nilai koefisien polinomial $Q(\lambda)$ pada Persamaan (3.14) diperoleh

$$a_0 = 1, a_1 = A, a_2 = B$$

$$a_3 = C, a_4 = 0, a_5 = 0.$$

Dari nilai di atas, dapat dibentuk matriks Hurwitz sebagai berikut

$$H = \begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 1 & 0 \\ C & B & A \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}.$$

Berdasarkan matriks Hurwitz di atas dapat ditentukan determinan Hurwitz yaitu

$$\Delta_1 = a_1 = A$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & 1 \\ C & B \end{vmatrix} = AB - C$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} A & 1 & 0 \\ C & B & A \\ 0 & 0 & C \end{vmatrix} = ABC - C^2 = (AB - C)C.$$

Berdasarkan nilai A, B dan C , maka dapat ditentukan bahwa

1. Karen nilai $A > 0$ maka $\Delta_1 = A > 0$
2. Karen nilai $A > 0, B > 0, C > 0$ dan $AB > C$, maka
 $\Delta_2 = AB - C > 0$
3. Karen nilai $A > 0, B > 0, C > 0$ dan $AB > C$, maka
 $\Delta_3 = (AB - C)C > 0$.

Karena nilai $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0$ dan $\Delta_3 > 0$, maka polinomial $Q(\lambda)$ mempunyai pembuat nol yang bagian realnya negatif. Hal ini berakibat semua bagian real nilai eigen pada matriks $Jf(P^*)$ bernilai negatif untuk $R_0 > 1$. Jadi titik ekuilibrium $P^* = (E^*, I^*, N^*)$ stabil asimtotik lokal.

Kontrol Optimal Model Penyakit Scabies

Telah diketahui bahwa model **Penyakit Scabies** bersifat stabil asimtotik lokal pada kedua titik ekuilibrium yang diperoleh. Selanjutnya karena penyebaran model stabil maka model tersebut akan diberi kontrol. Kontrol yang diberikan berupa pengobatan dimana obat tersebut diberikan kepada individu yang rentan terinfeksi.

Berdasarkan penggunaan pemberian pengobatan, maka model matematika **Penyakit Scabies** dengan kontrol adalah sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= V - a_{11}SE - a_{22}SI - \mu S - uS \\ \frac{dE}{dt} &= a_{11}SE + a_{22}SI - b_0E - (\mu + \alpha_{10})E \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\frac{dI}{dt} = b_0E - (\mu + \alpha_{20})I$$

dengan u merupakan tingkat pengobatan pada waktu t dan diberikan kondisi awal $S(0) = S_0, I(0) = I_0$, dan $R(0) = R_0$.

Performance index dalam bentuk Lagrange untuk model *penyakit Scabies* adalah sebagai berikut :

$$J(u) = \int_0^{t_f} \left(I(t) - \frac{A}{2} u^2(t) \right) dt \quad (3.24)$$

dengan $A \geq 0$ merupakan variabel bobot dari biaya obat, u merupakan tingkat pengobatan dan t_f merupakan lama waktu program pengobatan. Kemudian akan dicari kontrol yang optimum (u^*) dengan meminimumkan *performance index* sebagai berikut :

$$J(u^*) = \min \int_0^{t_f} \left(I(t) - \frac{A}{2} u^2(t) \right) dt \quad (3.25)$$

Dimana U merupakan himpunan dari beberapa kontrol yang layak, didefinisikan sebagai berikut :

$$U = \{u(t) : 0 \leq u \leq 0.9, 0 \leq t \leq t_f\}$$

Misalkan :

$$\begin{aligned} f_1(S, E, I, u) &= V - a_{11}SE - a_{22}SI - \mu S - uS \\ f_2(S, E, I, u) &= a_{11}SE + a_{22}SI - b_0E - (\mu + \alpha_{10})E \\ f_3(S, E, I, u) &= b_0E - (\mu + \alpha_{20})I \end{aligned}$$

Berdasarkan pada tinjauan pustaka persamaan (2.19) maka diperoleh persamaan *state* sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \dot{S} &= f_1(S, E, I, u) = V - a_{11}SE - a_{22}SI - \mu S - uS \\ \dot{E} &= f_2(S, E, I, u) = a_{11}SE + a_{22}SI - b_0E - (\mu + \alpha_{10})E \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$\dot{I} = f_3(S, E, I, u) = b_0E - (\mu + \alpha_{20})I$$

Kemudian berdasarkan prinsip maksimum potryagin, langkah – langkah untuk menyelesaikan permasalahan kontrol optimal adalah sebagai berikut :

Langkah pertama adalah membentuk persamaan Hamiltonian. Pada persamaan *performance index* untuk model model *penyakit Scabies* dengan kontrol (3.24) merupakan *performance index* dalam bentuk lagrange, sehingga berdasarkan persamaan (3.24) dan (2.21) diperoleh sebagai berikut :

$$L(x(t), u(t), t) = I(t) - \frac{A}{2} u^2(t) \quad (3.27)$$

Dari persamaan (3.27) dan persamaan *state* (3.26) maka diperoleh persamaan Hamiltonian adalah sebagai berikut :

$$\begin{aligned} H &= L(x(t), u(t), t) + \sum_{i=1}^n \lambda_i(t)(f_i(x(t)), u(t), t) \\ &= I(t) - \frac{A}{2}u^2(t) + \sum_{i=1}^3 \lambda_i f_i(S, E, I, u) \\ &= I(t) - \frac{A}{2}u^2(t) + \lambda_1 f_1(S, E, I, u) + \lambda_2 f_2(S, E, I, u) + \lambda_3 f_3(S, E, I, u) \\ &= I(t) - \frac{A}{2}u^2(t) + \lambda_1(V - a_{11}SE - a_{22}SI - \mu S - uS) + \lambda_2(a_{11}SE + a_{22}SI - b_0E - (\mu + \alpha_{10})E) + \lambda_3(rI - \mu R + uS) \end{aligned} \quad (3.28)$$

Langkah ke dua yaitu memperoleh persamaan *costate*. Persamaan *costate* berdasarkan persamaan (2.23) dapat diperoleh dengan cara :

$$\dot{\lambda}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, (i = 1, 2, \dots, n)$$

Karena pada persamaan *state* (3.26) terdapat tiga variabel *state* maka diperoleh tiga persamaan *costate* sebagai berikut :

$$\dot{\lambda}_1 = \frac{-\partial H}{\partial S} \quad (3.29)$$

$$\dot{\lambda}_2 = \frac{-\partial H}{\partial E} \quad (3.30)$$

$$\dot{\lambda}_3 = \frac{-\partial H}{\partial I} \quad (3.31)$$

Langkah ke tiga adalah memperoleh persamaan *state*. Berdasarkan persamaan (2.24), persamaan *state* dapat diperoleh dengan cara :

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial \lambda_i}, (i = 1, 2, \dots, n)$$

Karena pada persamaan *state* (3.26) terdapat tiga variabel *state* yaitu *S*, *I*, dan *R* maka diperoleh tiga persamaan *state* sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= V - a_{11}SE - a_{22}SI - \mu S - uS \\ \frac{dE}{dt} &= a_{11}SE + a_{22}SI - b_0E - (\mu + \alpha_{10})E \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$\frac{dI}{dt} = b_0E - (\mu + \alpha_{20})I$$

Langkah ke empat adalah mencari nilai kontrol *u*. Nilai kontrol *u* dapat diperoleh melalui persamaan (2.25) yaitu dengan cara :

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial u} &= 0 \\ Vu - \lambda_1 S + \lambda_3 S &= 0 \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh

$$u = \frac{(\lambda_1 - \lambda_3)S}{V} \quad (3.33)$$

Karena *u* terdefinisi di $0 \leq u \leq 0.9$ maka untuk nilai *u* yang optimal (*u**) juga berada di antara 0 sampai 0.9 sehingga berdasarkan persamaan (2.26) terdapat tiga kemungkinan yaitu :

$$u^* = \begin{cases} 0, & \frac{(\lambda_1 - \lambda_3)S}{V} \leq 0 \\ u, & 0 < \frac{(\lambda_1 - \lambda_3)S}{V} < 0.9 \\ 0.9, & \frac{(\lambda_1 - \lambda_3)S}{V} \geq 0.9 \end{cases}$$

Apabila $\frac{(\lambda_1 - \lambda_3)S}{V} \leq 0$ maka nilai $u^* = 0$ karena 0 merupakan nilai minimum dari batas u^* .
Kemungkinan kedua apabila $0 < \frac{(\lambda_1 - \lambda_3)S}{V} < 0.9$ maka nilai u^* akan berada di antara 0 sampai 0.9
dan kemungkinan ke tiga apabila $\frac{(\lambda_1 - \lambda_3)S}{V} \geq 0.9$ maka nilai $u^* = 0.9$ karena 0.9 merupakan nilai
maksimum dari batas u^* .

Sehingga berdasarkan ketiga kemungkinan di atas diperoleh kontrol u yang optimal (u^*)
adalah sebagai berikut :

$$u^* = \min \left(0.9, \max \left(0, \frac{(\lambda_1 - \lambda_3)S}{V} \right) \right)$$

DAFTAR PUSTAKA

- Anton, H., 1988. *Calculus*. Drexel University, John Wiley & Sons, New York.
- Affandi, P., (2015). Optimal Inventory Control System With Stochastic Demand. *Ethar*, Indonesia. 2016(3), 302 – 313.
- Affandi, P., (2015). Optimal Inventory Control Stochastic With Production Deteriorating. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, **300** (2018) 012019 doi:10.1088/1757-899X/300/1/012019.
- Bellomo N., Preziosi L. and Romano A. 2000. *Mechanics and Dynamical Systems with Mathematica*, Birkhauser, Boston.
- Burghes, D.N. 1980. *Introduction to Control Theory Including Optimal Control*. Springer-Verlag. New York.
- Cain, J.W. dan Angela M.R. 2010. *Ordinary and Partial Differential Equations An Introduction to Dynamical Systems*. Richmond. Virginia
- El-Gohary, A. and Bukhari, F. (2003). Optimal control of stochastic prey-predator models, *Applied Mathematics and Computations*, Vol. 146, 11, 403-415.