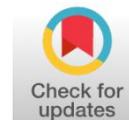


## Metode Level Set pada *Hyperbolic Mean Curvature Flow*

### The Level Set Method on Hyperbolic Mean Curvature Flow



Vita Kusumasari<sup>1\*</sup>, Makbul Muksar<sup>2</sup>, Tjang Daniel Chandra<sup>3</sup>, Kridha Pusawidjayanti<sup>4</sup>

<sup>1,2,3,4</sup> Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Malang. Jalan Semarang No. 5 Malang, 65145

\* Korespondensi Penulis. E-mail: [vita.kusumasari.fmipa@um.ac.id](mailto:vita.kusumasari.fmipa@um.ac.id), Telp: 082185884028

#### Abstrak

Pada artikel ini, metode level set diterapkan pada masalah pergerakan kurva berdasarkan *hyperbolic mean curvature flow*. Simulasi yang dilakukan meliputi masalah *hyperbolic mean curvature flow* dan *hyperbolic mean curvature flow* dengan kendala. Realisasi pergerakan kurva pada kedua permasalahan masing-masing menggunakan algoritma Hyperbolic MBO (HMBO) dan algoritma HMBO yang telah dimodifikasi untuk masalah dengan kendala. Kurva awal pada kedua permasalahan berupa lingkaran. Hasil simulasi yang ditampilkan berupa plot level set nol dan plot tiga dimensi. Hasil pergerakan kurva pada kedua permasalahan menunjukkan bahwa kurva semakin menyusut. Untuk masalah *hyperbolic mean curvature flow*, kurva akan menyusut dan menghilang. Sedangkan pada masalah *hyperbolic mean curvature flow* dengan kendala, kurva akan menyusut dan berhenti bergerak setelah menyentuh kurva kendala.

Kata kunci: Metode level set, *Hyperbolic mean curvature flow*, Kendala, Algoritma HMBO

#### Abstract

*In this article, the level set method is applied to the curve movement problem based on hyperbolic mean curvature flow. The simulation carried out include the problems of hyperbolic mean curvature flow and hyperbolic mean curvature flow with an obstacle. The realization of the curve movement in both problems uses the Hyperbolic MBO (HMBO) algorithm and the modified HMBO algorithm for problems with an obstacle, respectively. The initial curve for both problems is circle. The simulation results displayed are the plot of zero set level and three-dimensional plot. The results of the curve movement in both problems show that the curve shrink. For hyperbolic mean curvature flow problem, the curve will shrink and vanish. Meanwhile, in the hyperbolic mean curvature flow problem with an obstacle, the curve will shrink and stop moving after touching the obstacle.*

Keyword: Level set method, Hyperbolic mean curvature flow, Obstacle, HMBO algorithm

## PENDAHULUAN

Masalah hiperbolik berkaitan dengan model pergerakan kurva osilasi. Rotstein, dkk (1999, p. 1258) mengembangkan model pergerakan terkait *hyperbolic crystalline curvature* dan menampilkan hasil numerik terkait osilasi teredam. Ishida, dkk (2017, p. 4) mengembangkan perluasan dari *hyperbolic mean curvature flow* dalam mensimulasikan masalah pergerakan membran tipis. Ginder & Svadlenka (2016, p. 504) mengembangkan algoritma Hyperbolic MBO (HMBO) untuk merealisasikan pergerakan kurva menurut *hyperbolic mean curvature flow*. Kusumasari (2018, p. 5) memodifikasi algoritma HMBO untuk mensimulasikan masalah *hyperbolic mean curvature flow* dengan kendala. Pada artikel tersebut, penulis menyajikan hasil simulasi numerik pergerakan kurva pada masalah hiperbolik dengan kendala yang salah satunya melibatkan kurva tertutup dengan lingkaran sebagai kurva kendala. Selanjutnya, Kusumasari, dkk (2020, p. 3) menambahkan simulasi masalah hiperbolik pada pergerakan kurva tertutup dengan kurva kendala berupa elips.



DOI: <https://doi.org/10.26486/jm.v5i2.1437>

W: <http://ejurnal.mercubuana-yogya.ac.id/index.php/mercumatika>

E: [mercumatika@mercubuana-yogya.ac.id](mailto:mercumatika@mercubuana-yogya.ac.id)



Artikel ini akan menerapkan metode level set dengan algoritma HMBO (Ginder & Svadlenka, 2016, p. 504) untuk masalah *hyperbolic mean curvature flow* dan menerapkan algoritma HMBO yang dimodifikasi (Kusumasari, 2018, p. 5) untuk masalah *hyperbolic mean curvature flow* dengan kendala. Metode level set digunakan untuk mendeskripsikan pergerakan kurva secara implisit yaitu dengan menggunakan level set nol dari fungsi yang bersesuaian (Van der Meer, 2015, p. 94). Simulasi pergerakan kurva berupa lingkaran terkait *hyperbolic mean curvature flow* pada Ginder & Svadlenka (2016, p. 517) menyajikan tabel error dan kekonvergenan. Oleh karena itu, artikel ini akan menyajikan hasil simulasi serupa berupa plot level set nol dan plot tiga dimensi. Simulasi terkait *hyperbolic mean curvature flow* dengan kendala pada kurva berbentuk lingkaran oleh Kusumasari (2018, p. 8) menyajikan plot level set nol. Karenanya, artikel ini akan melengkapi dengan tampilan plot tiga dimensi.

## METODE

Metode level set dapat digunakan untuk merepresentasikan pergerakan kurva, sehingga kurva dinyatakan sebagai level set nol dari suatu fungsi yang bersesuaian (Ginder, dkk, 2016, p. 1). Anggap kurva dinyatakan oleh level set nol dari fungsi  $\mu : \mathbb{R}^2 \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ . Pergerakan kurva pada saat  $t \in [0, T)$  diberikan oleh

$$\Gamma_t = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \mu(x, t) = 0\}.$$

Akibatnya, pergerakan kurva pada saat  $t$  dapat dipandang sebagai level set nol dari  $\mu(x, t)$ . Dengan demikian, misalkan  $x(t)$  menyatakan suatu titik  $\Gamma_t$  maka

$$\mu(x(t), t) = 0. \quad (1)$$

Penurunan persamaan (1) terhadap  $t$  dan penerapan aturan rantai menghasilkan

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mu(x(t), t) &= 0, \\ \mu_t + \langle \nabla \mu, \frac{dx}{dt} \rangle &= 0, \\ \mu_t + \langle \frac{dx}{dt}, \frac{\nabla \mu}{|\nabla \mu|} \rangle |\nabla \mu| &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

dengan  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  menyatakan *inner product* standar pada  $\mathbb{R}^n$ . Selanjutnya, kecepatan pada arah normal terhadap level set dinyatakan oleh

$$v = \frac{dx}{dt} \cdot n,$$

dengan  $n = \frac{\nabla \mu}{|\nabla \mu|}$  merupakan normal vektor. Oleh karena itu, persamaan (2) dapat dituliskan sebagai

$$\mu_t + v|\nabla \mu| = 0. \quad (3)$$

Penerapan metode level set pada masalah *hyperbolic mean curvature flow* berkaitan dengan pergerakan kurva menurut percepatan pada arah normal yang sebanding dengan kurvatur dan dinyatakan dengan (Kusumasari, 2018, p. 1)

$$a = -\kappa. \quad (4)$$

Untuk merepresentasikan persamaan (4) dalam level set yang melibatkan ekspresi  $\mu(x, t)$ , maka persamaan ini dinyatakan sebagai

$$a = \frac{d}{dt} v.$$

Berkaitan dengan persamaan (3), maka

$$a = -\frac{d}{dt} \left( \frac{\mu_t}{|\nabla \mu|} \right),$$

sehingga diperoleh

$$a = -\frac{\mu_{tt}|\nabla \mu| - \mu_t|\nabla \mu|_t}{|\nabla \mu|^2}.$$

Sementara itu, representasi kurvatur dalam level set adalah

$$\kappa = \operatorname{div} \left( \frac{\nabla \mu}{|\nabla \mu|} \right).$$

Berdasarkan persamaan (4), maka

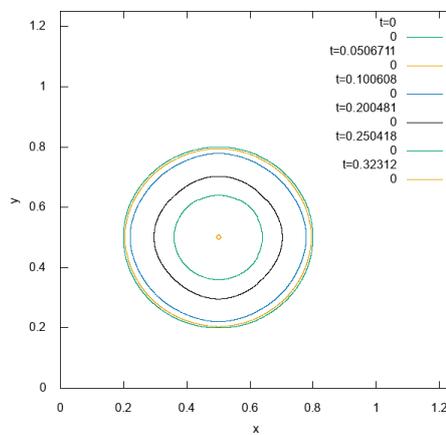
$$\frac{\mu_{tt}|\nabla \mu| - \mu_t|\nabla \mu|_t}{|\nabla \mu|^2} = \operatorname{div} \left( \frac{\nabla \mu}{|\nabla \mu|} \right). \quad (5)$$

**HASIL DAN PEMBAHASAN**

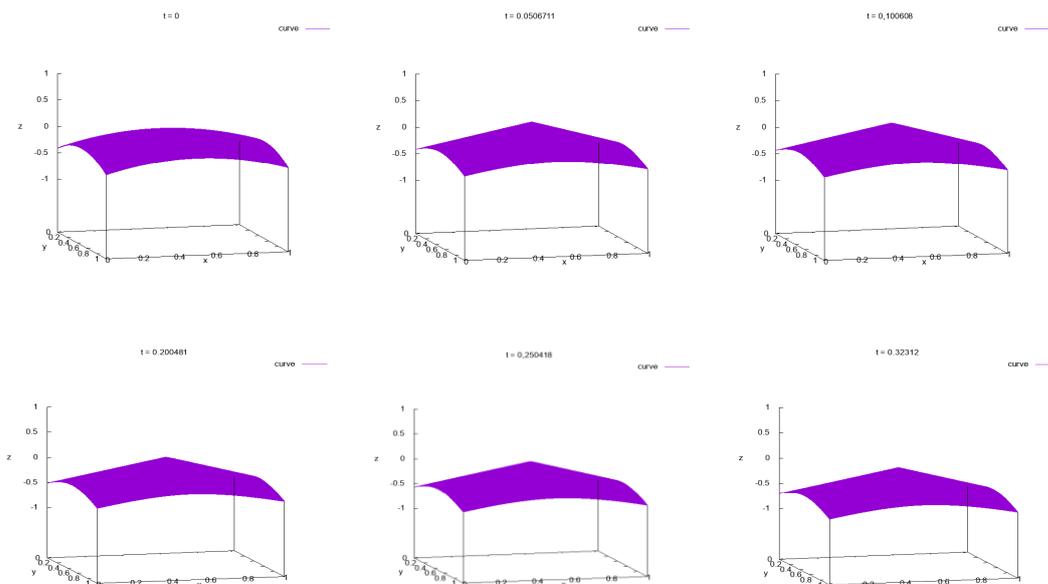
Untuk merealisasikan pergerakan kurva menurut *hyperbolic mean curvature flow* ini dilakukan dengan memilih fungsi level set  $\mu(x, t)$  sebagai jarak bertanda terhadap  $\Gamma_t$ . Kusumasari (2018, p. 3) mendefinisikan fungsi jarak bertanda dari suatu titik  $x \in E_t = \{x \in \mathbb{R}^2 | \mu(x, t) > 0\}$  terhadap  $\Gamma_t = \partial E_t$  sebagai berikut

$$d(x, t) = \begin{cases} \inf_{y \in \Gamma_t} \|x - y\| & \text{untuk } x \in E_t, \\ -\inf_{y \in \Gamma_t} \|x - y\| & \text{untuk yang lain.} \end{cases}$$

Dalam hal ini, fungsi jarak bertanda memiliki sifat bahwa  $|\nabla d| = 1$ , sehingga persamaan (5) dapat diaproksimasi dengan menggunakan persamaan gelombang (Kusumasari, 2018, p. 3). Simulasi untuk masalah *hyperbolic mean curvature flow* dengan menerapkan metode level set menggunakan algoritma HMBO (Ginder & Svadlenka, 2016, p. 504). Sedangkan, masalah *hyperbolic mean curvature flow* dengan kendala disimulasikan dengan menggunakan algoritma HMBO yang dimodifikasi (Kusumasari, 2018, p. 5). Simulasi untuk kedua permasalahan menggunakan kurva awal berupa lingkaran yang mengacu pada (Ginder & Svadlenka, 2016, p. 513) dan (Kusumasari, 2018, p. 8) untuk masalah dengan kendala.

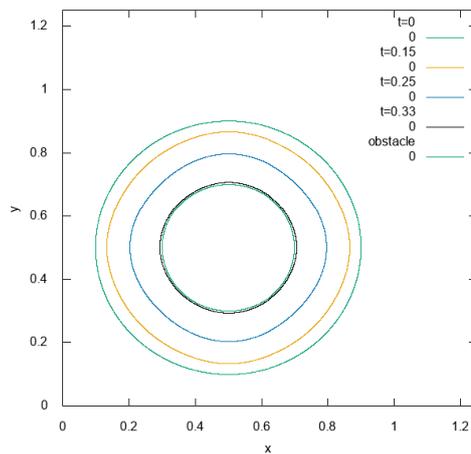


Gambar 1. Plot level set nol pada masalah *hyperbolic mean curvature flow*

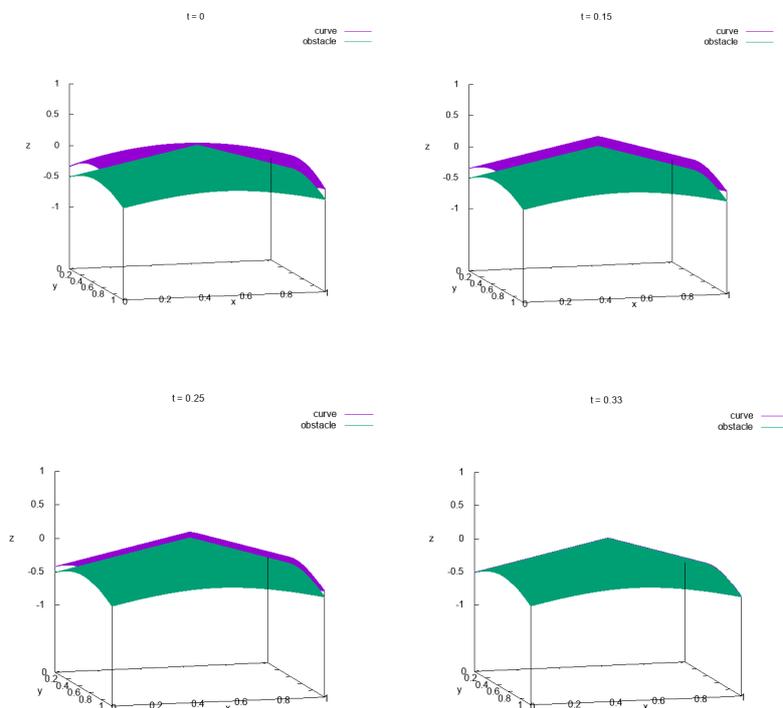


Gambar 2. Plot tiga dimensi pada masalah *hyperbolic mean curvature flow*

Gambar 1 menunjukkan plot level set nol untuk beberapa *time-step* pada masalah *hyperbolic mean curvature flow*. Plot tiga dimensinya ditunjukkan pada Gambar 2. Berdasarkan Gambar 1, pergerakan kurva menunjukkan bahwa kurva menyusut dan menghilang. Hasil ini sesuai dengan hasil yang dijabarkan pada (Ginder & Svadlenka, 2016, p. 217). Sementara itu, jika ditinjau dari plot tiga dimensi pada Gambar 2, maka nampak bahwa permukaan yang bersesuaian bergerak menurun hingga tidak berpotongan dengan bidang  $z(x, y) = 0$ . Hal ini berakibat pada plot level set nol bahwa kurva yang semakin menyusut hingga akhirnya menghilang.



Gambar 3. Plot level set nol pada masalah *hyperbolic mean curvature flow* dengan kendala



Gambar 4. Plot tiga dimensi pada masalah *hyperbolic mean curvature flow* dengan kendala

Plot level set nol untuk beberapa *time-step* pada masalah *hyperbolic mean curvature flow* dengan kendala ditunjukkan pada Gambar 3. Gambar 4 menunjukkan plot tiga dimensinya. Seiring

dengan masalah *hyperbolic mean curvature flow*, dari Gambar 3, kurva menyusut, tetapi kurva berhenti bergerak ketika menyentuh kurva kendala. Hasil ini serupa dengan hasil pada (Kusumasari, 2018, p. 8). Lebih lanjut, plot tiga dimensi pada Gambar 4 juga menunjukkan bahwa permukaan yang bersesuaian bergerak menurun hingga menyentuh permukaan kendala yang digambarkan dengan permukaan berwarna hijau. Namun, permukaan ini akan berhenti bergerak ketika telah berhimpit dengan permukaan kendala. Hal ini yang mengakibatkan pada plot level set nol bahwa kurva berhenti menyusut ketika menyentuh kurva kendala.

## SIMPULAN

Metode level set telah diterapkan pada masalah pergerakan kurva berdasarkan *hyperbolic mean curvature flow*. Simulasi pergerakan kurva pada masalah *hyperbolic mean curvature flow* berdasarkan metode level set menggunakan algoritma Hyperbolic MBO (HMBO). Sedangkan untuk menangani masalah *hyperbolic mean curvature flow* dengan kendala menggunakan algoritma HMBO yang dimodifikasi. Hasil simulasi dengan kurva awal berupa lingkaran pada masalah *hyperbolic mean curvature flow* menunjukkan bahwa pergerakan kurva semakin menyusut dan menghilang. Hal ini diperjelas dengan plot tiga dimensi yang menunjukkan bahwa permukaan bergerak menurun. Sementara itu, hasil simulasi pada masalah *hyperbolic mean curvature flow* dengan kendala menunjukkan bahwa pergerakan kurva juga menyusut, tetapi kurva berhenti bergerak ketika menyentuh kurva kendala. Tampilan plot tiga dimensi menunjukkan bahwa permukaan bergerak menurun hingga menempel pada permukaan kendala.

## DAFTAR PUSTAKA

- Ginder, E. & Svadlenka, K. (2016). Wave-type threshold dynamics and the hyperbolic mean curvature flow. *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, 33, 501 – 523.
- Ginder, E., Katayam, A., Svadlenka, K. (2016). On an approximation method for hyperbolic mean curvature flow. *RIMS Kokyuroku*, 1995, 1 – 8.
- Kusumasari, V. (2018). Hyperbolic mean curvature flow with an obstacle. *The Science Reports of Kanazawa University*, 62, 1 – 22.
- Kusumasari, V., Purnomo, M. F. E., Chandra, T. D., Oktoviana, L. T., Agung, M. (2020). Simulation of hyperbolic mean curvature flow with an obstacle in the closed curve. *AIP Conference Proceedings*, 2215, 1 – 6.
- Rotstein, H. G., Brandon, S., Novick-Cohen, A. (1999). Hyperbolic flow by mean curvature. *Journal of Crystal Growth*, 198/199, 1256 – 1261.
- Ishida, S., Yamamoto, M., Ando, R., Hachisuka, T. (2017). A Hyperbolic Geometric Flow for Evolving Films and Foams. *ACM Transactions on Graphics*, 36 (6), 1 – 11.
- Van der Meer, F. P. (2015). A level set model for delamination in composite materials. *Numerical Modelling of Failure in Advanced Composite Materials*. 93 – 107.